JHS 154 ETRS89-järjestelmään liittyvät karttaprojektiot, tasokoordinaatistot ja karttalehtijako, Liite 1: Projektiokaavat

Versio: 6.6.2008
Julkaistu:
Voimassaoloaika: Toistaiseksi

Transverse Mercator-projektiolle on esitetty laskentakaavoja esimerkiksi seuraavissa lähteissä:

- Hirvonen, R.A., Matemaattinen Geodesia, Teknillisen korkeakoulun ylioppilaskunta, Helsinki, 1972
- Hirvonen, R.A. The Use of Subroutines in Geodetic Computations, Maanmittaus, 1970.
- Hooijberg, Marten: Practical Geodesy, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1997, pages 81-84
- Krüger L: Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene, B. G. Teubner Verlag Leipzig 1912, pages 11-22
- König, R.; Weise, K. H.: Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie und Kartographie, Springer Verlag Berlin Göttingen Heidelberg, 1951
- Meade, B. K., Program for Computing Universal Transverse Mercator (UTM) Coordinates for Latitudes North or South and Longitudes East or West, Surveying and Mapping, Vol. 47, No. 1, pages 37 – 49.
- Poder, K.; Engsager, K.: Some Conformal Mappings and Transformations for Geodesy and Topographic Cartography, Publications 4 series, volume 6, National Survey and Cadastre Denmark, 1998

Seuraavaksi esitettävät kaavat ovat R.A. Hirvosen kirjasta Matemaattinen Geodesia ja Maanmittaus-lehden artikkelista.

Suomessa käytettävien ellipsoidien parametreja

Ellipsoidi	Isoakselin puolikas a (m)	Pikkuakselin puolikas b (m)	Litistyssuhde f
Kansainvälinen 1924 (Hayford 1909)	6378388.0	6356911.946128	1/297.0
GRS80	6378137.0	6356752.314140	1/298.257222101
WGS84	6378137.0	6356752.314245	1/298.257223563

Kaavoissa esiintyvät symbolit ja niiden määritelmät
kaavoissa käytetään kulmayksikkönä radiaania.

Symboli		Määritelmä
a	=	ellipsoidin isoakselin puolikas
b	=	ellipsoidin pikkuakselin puolikas
f	=	ellipsoidin litistyssuhde
k_0	=	mittakaavakerroin keskimeridiaanilla
λ_0	=	projektion keskimeridiaani
E_0	=	Itäkoordinaatin arvo keskimeridiaanilla
φ	=	geodeettinen leveys
λ	=	geodeettinen pituus
E	=	projektion itäkoordinaatti

Symboli		Määritelmä
N	=	projektion pohjoiskoordinaatti
γ	=	meridiaanikonvergenssi
k	=	mittakaavakerroin
A_1	=	meridiaanin pituisen ympyrän säde
e^2	=	ensimmäisen epäkeskisyyden neliö
e'^2	=	toisen epäkeskisyyden neliö
n	=	toinen litistyssuhde
t	=	suuntakulma tasolla (suuntakorjauksen kaavassa $\delta = T - t$)
c	=	napakaarevuussäde
M	=	meridiaanikaarevuussäde
N	=	poikittaiskaarevuussäde (kaavassa (42))

Hyperboliset ja käänteiset hyperboliset (area) funktiot:
(Vain hyperbolisten funktioiden kaavoissa e = Neperin luku, muutoin e = ensimmäinen epäkeskisyys)

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{arsech}(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

Apusuureet

$$n = \frac{f}{2-f} = \frac{a-b}{a+b} \qquad (01)$$

$$A_1 = \frac{a}{1+n}\left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64}\right) \qquad (02)$$

$$e^2 = 2f - f^2 \qquad (03)$$

$$e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \qquad (04)$$

$$V^2 = 1 + e'^2\cos^2(\varphi) \qquad (05)$$

$$h_1 = \frac{1}{2}n - \frac{2}{3}n^2 + \frac{37}{96}n^3 - \frac{1}{360}n^4 \qquad (06)$$

$h_2 = \frac{1}{48}n^2 + \frac{1}{15}n^3 - \frac{437}{1440}n^4$

$h_3 = \frac{17}{480}n^3 - \frac{37}{840}n^4$

$h_4 = \frac{4397}{161280}n^4$

$h_1' = \frac{1}{2}n - \frac{2}{3}n^2 + \frac{5}{16}n^3 + \frac{41}{180}n^4$ (07)

$h_2' = \frac{13}{48}n^2 - \frac{3}{5}n^3 + \frac{557}{1440}n^4$

$h_3' = \frac{61}{240}n^3 - \frac{103}{140}n^4$

$h_4' = \frac{49561}{161280}n^4$

Projektiokaavat

Geodeettisista koordinaateista (φ,λ) tasokoordinaateiksi (N, E)

Syöte: pisteen geodeettiset koordinaatit (φ,λ)
Tulos: pisteen tasokoordinaatit (N, E) projektiotasolla,

$Q' = \text{arsinh}[\tan(\varphi)]$ (08)
$Q'' = \text{artanh}[e \cdot \sin(\varphi)]$ (09)
$Q = Q' - e \cdot Q''$ (10)

$l = \lambda - \lambda_0$ (11)
$\beta = \arctan[\sinh(Q)]$ (12)
$\eta' = \text{artanh}[\cos(\beta) \cdot \sin(l)]$ (13)
$\xi' = \arcsin[\frac{\sin(\beta)}{\text{sech}(\eta')}]$ (14)

$\xi_1 = h_1'\sin(2\xi')\cosh(2\eta')$ (15)
$\xi_2 = h_2'\sin(4\xi')\cosh(4\eta')$
$\xi_3 = h_3'\sin(6\xi')\cosh(6\eta')$
$\xi_4 = h_4'\sin(8\xi')\cosh(8\eta')$

$\eta_1 = h_1'\cos(2\xi')\sinh(2\eta')$ (16)
$\eta_2 = h_2'\cos(4\xi')\sinh(4\eta')$
$\eta_3 = h_3'\cos(6\xi')\sinh(6\eta')$
$\eta_4 = h_4'\cos(8\xi')\sinh(8\eta')$

$\xi = \xi' + (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4)$ (17)
$\eta = \eta' + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4)$ (18)

$N = A_1 \cdot \xi \cdot k_0$ (19)
$E = A_1 \cdot \eta \cdot k_0 + E_0$ (20)

Tasokoordinaateista (N, E) geodeettisiin koordinaatteihin (φ,λ)

Syöte: pisteen tasokoordinaatit (N, E) projektiotasolla,
Tulos: pisteen geodeettiset koordinaatit (φ,λ)

$$\xi = \frac{N}{A_1 \cdot k_0} \tag{21}$$

$$\eta = \frac{E - E_0}{A_1 \cdot k_0} \tag{22}$$

$$\xi_1' = h_1 \sin(2\xi)\cosh(2\eta) \tag{23}$$
$$\xi_2' = h_2 \sin(4\xi)\cosh(4\eta)$$
$$\xi_3' = h_3 \sin(6\xi)\cosh(6\eta)$$
$$\xi_4' = h_4 \sin(8\xi)\cosh(8\eta)$$

$$\eta_1' = h_1 \cos(2\xi)\sinh(2\eta) \tag{24}$$
$$\eta_2' = h_2 \cos(4\xi)\sinh(4\eta)$$
$$\eta_3' = h_3 \cos(6\xi)\sinh(6\eta)$$
$$\eta_4' = h_4 \cos(8\xi)\sinh(8\eta)$$

$$\xi' = \xi - (\xi_1' + \xi_2' + \xi_3' + \xi_4') \tag{25}$$
$$\eta' = \eta - (\eta_1' + \eta_2' + \eta_3' + \eta_4') \tag{26}$$

$$\beta = \arcsin[\operatorname{sech}(\eta')\cdot\sin(\xi')] \tag{27}$$
$$l = \arcsin[\frac{\tanh(\eta')}{\cos(\beta)}] \tag{28}$$

$$Q = \operatorname{arsinh}[\tan(\beta)] \tag{29}$$
$$Q' = Q + e\cdot\operatorname{artanh}[e\cdot\tanh(Q)] \tag{30}$$
$$Q' = Q + e\cdot\operatorname{artanh}[e\cdot\tanh(Q')] \quad \text{iterointi, kunnes muutos =0} \tag{31}$$

$$\varphi = \arctan[\sinh(Q')] \tag{32}$$
$$\lambda = \lambda_0 + l \tag{33}$$

Käytännössä kaavassa (31) riittää kolme iteraatiokierrosta. Ensin kaavalla (29) laskettu Q sijoitetaan kaavaan (30), jolla saadaan Q' :n ensimmäinen likiarvo. Q':n likiarvo sijoitetaan kaavaan (31), jota iteroidaan.

Meridiaanikonvergenssi

Syöte: pisteen geodeettiset koordinaatit (φ,λ), keskimeridiaani λ_0
Tulos: meridiaanikonvergenssikulma (γ)

$$\gamma = l\cdot\sin(\varphi)\cdot[1+\frac{1}{3}V^2(2V^2-1)\cos^2(\varphi)\cdot l^2], \quad \textit{missä } l = \lambda - \lambda_0 \tag{34}$$

Mittakaavakorjaus ja pituuskorjaus

Syöte: pisteen geodeettiset koordinaatit (φ,λ), keskimeridiaani λ_0
Tulos: mittakaavakerroin (k) pisteessä (φ,λ)

$$k = k_0[1+\frac{1}{2}\cos^2(\varphi)\cdot l^2], \quad missä\ \ l = \lambda - \lambda_0 \tag{35}$$

Mittakaavakerroin muuttuu hitaasti ja sitä voidaan monissa tarkoituksissa pitää vakiona noin 10 km^2 :n suuruisella alueella. Pidemmillä etäisyyksillä mittakaavakerroin voidaan laskea kaavalla:

$$k = 1/6(k_1 + 4k_m + k_2) \tag{36}$$

missä k_1 ja k_2 ovat mittakaavakertoimet linjan päissä ja k_m on mittakaavakerroin linjan puolessavälissä.

Maastomittauksissa voidaan käyttää kaavalla (35) määritettyä mittakaavakertoimen arvoa k, mikäli esimerkiksi takymetrissä tehdään muutkin etäisyysmittauksen reduktiot mittaushetkellä. Muuten ellipsoidin pinnalla tehty ja ellipsoidin kaareksi redukoitu etäisyyshavainto korjataan projektiotasolle kertomalla se k:lla, joka saadaan joko kaavalla (36) tai tasokoordinaateista laskien kaavalla:

$$k = k_0[1+\frac{1}{6R^2}(E_1^{\,2} + E_1E_2 + E_2^{\,2})] \tag{37}$$

Suuntakorjaus

Ellipsoidin pinnalla havaittu suunta korjataan tasolle suuntakorjauksella (Arc-to-chord Correction δ = T - t). Suuntakorjaus δ lasketaan seuraavilla kaavoilla:

Syöte: kahden pisteen koordinaatit (N_1, E_1) ja (N_2, E_2)
Tulos: suuntakorjaus $\delta_{1\text{-}2}$ ja $\delta_{2\text{-}1}$

$$\delta_{1\text{-}2} = \frac{1}{6R^2}(N_2 - N_1)(2E_1 + E_2) \tag{38}$$

$$\delta_{2\text{-}1} = \frac{1}{6R^2}(N_1 - N_2)(2E_2 + E_1) \tag{39}$$

Kaavoissa (37) – (39) käytettävistä itäkoordinaateista E_1 ja E_2 on vähennettävä 500 000 m (itäkoordinaatin arvo keskimeridiaanilla). R on keskikaarevuussäde, joka voidaan laskea kaavalla:

$$R = \sqrt{M \cdot N} \tag{40}$$

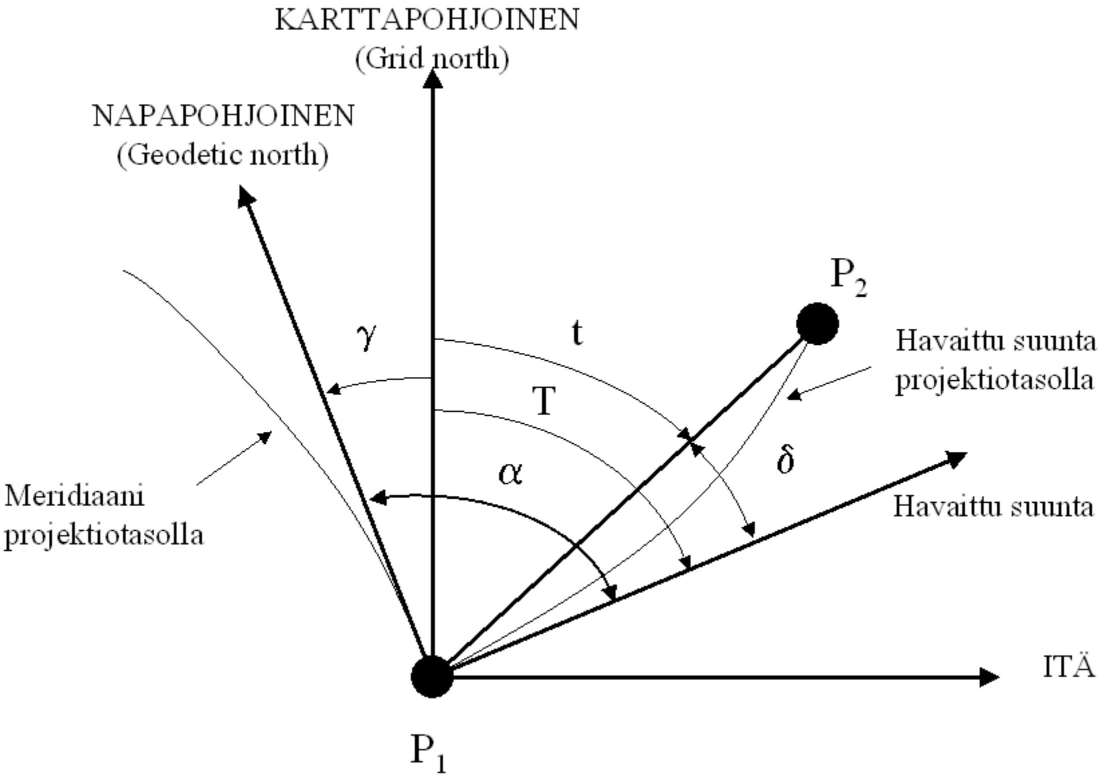
$$M = \frac{c}{V^3} \tag{41}$$

$$N = \frac{c}{V} \tag{42}$$

$$c = \frac{a^2}{b} \tag{43}$$

Suuntakulma (t) projektiotasolla, atsimuutti (α), konvergenssikulma (γ) ja suuntakorjaus (δ) riippuvat toisistaan seuraavan kaavan mukaisesti:

$$t = \alpha - \gamma - \delta \tag{44}$$



Kuva 4. Karttapohjoinen, napapohjoinen, konvergenssikulma ja suuntakorjaus.

Kun piste on keskimeridiaanin itäpuolella, karttapohjoinen on itään napapohjoisesta ja meridiaanikonvergenssi on positiivinen. Pisteen ollessa länteen keskimeridiaanista, karttapohjoinen on länteen napapohjoisesta ja meridiaanikonvergenssi on negatiivinen. Katso myös kuva 3.